ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d'ADMISSION 1987

MATHEMATIQUES

EPREUVE ECRITE OBLIGATOIRE d'ADMISSIBILITE

(Temps accordé : 4 heures)

[Coefficient : 3]

L'épreuve se compose de deux exercices et d'un problème indépendants.

Elle est paginée de 1/8 à 8/8.

L'usage des tables numériques et des calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes, est autorisé.

Afin de limiter les calculatrices à un format raisonnable, leur surface de base ne doit pas dépasser 21 cm de long et 15 cm de large.

L'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit, de même que l'usage des notices fournies par les constructeurs.

- Les copies illisibles, mal présentées ou mal rédigées seront inévitablement pénalisées.
- Chaque candidat indiquera sur chaque copie le numéro de celle-ci et le nombre total de copies rendues.
- De plus pour les candidats originaires des classes TA, la numérotation des pages sera précédée de l'indication : TA.

PREMIER EXERCICE

$\vec{E}_3$ désigne l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}_3$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Soit $\mathbb{H} = \{q = (a, \vec{u}) \ ; \ a \in \mathbb{R} \ , \ \vec{u} \in \vec{E_3}\}$, muni des lois :

$$\forall (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}_3^2 \ , \begin{cases} (a, \vec{u}) + (b, \vec{v}) = (a + b, \vec{u} + \vec{v}) \\ \lambda (a, \vec{u}) = (\lambda a, \lambda \vec{u}) \ . \end{cases}$$

Soit $q = (a, \vec{u})$ un élément de $\mathbb{H}$; on note $\mathcal{R}(q) = a$ et $\mathcal{T}(q) = \vec{u}$.

1°/ Montrer que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En préciser la dimension et une base.

2°/ On définit sur $\mathbb{H}$ une multiplication par :

$$(a, \vec{u})(b, \vec{v}) = (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v}) \ .$$

On pose $U = (1, \vec{0})$, $I = (0, \vec{i})$, $J = (0, \vec{j})$ et $K = (0, \vec{k})$.

Vérifier que U est neutre pour la multiplication et calculer les produits I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI, JI, KJ et IK.

3°/ Démontrer les équivalences :

a) $\mathcal{T}(q) = \vec{0} \iff (\mathcal{T}(q^2) = \vec{0}$ et $\mathcal{R}(q^2) \geqslant 0)$

b) $\mathcal{R}(q) = 0 \iff (\mathcal{T}(q^2) = \vec{0}$ et $\mathcal{R}(q^2) \leqslant 0)$.

4°/ Résoudre dans $\mathbb{H}$ les équations :

a) $q^2 = U$

b) $q^2 = -U$.

5°/ Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse dans $\mathbb{H}$.

6°/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{C} = \{q \in \mathbb{H} \ ; \ \forall r \in \mathbb{H} \ , \ rq = qr\}$.

DEUXIEME EXERCICE

$\mathbb{C}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients complexes, $\mathbb{R}[X]$ le sous-anneau des polynômes à coefficients réels.

Soit n un entier strictement positif ; on considère le polynôme :

$$P_n = \frac{1}{2i} \left[(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1} \right]$$

1°/ Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$.

Préciser le degré de P_n et le coefficient du terme de plus haut degré.

2°/ Calculer les racines de P_n.

3°/ Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n(X) = Q_n(X^2)$.

Donner la décomposition de Q_n dans $\mathbb{R}[X]$.

.../...
TOURNER S.V.P.

ECOLES NATIONALES SUPERIEURES des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES DE DOUAI
page 223
1987

4°/ a) Calculer la somme S_n définie par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$.

(cot désigne la cotangente)

b) Calculer la somme T_n définie par : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

5°/ Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left]0 , \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} .$$

6°/ Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} .$$

En utilisant ce qui précède, montrer que la suite $(u_p)_{p \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

P R O B L E M E

On appelle $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}^{-*}$ l'ensemble des réels strictement négatifs et F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'ensemble E des fonctions de F vérifiant :

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}^{-*} , \quad f(t) = 0 \\ \exists A \in \mathbb{R}^+ \quad \left| \begin{array}{l} \forall t > A , \quad f(t) = 0 \\ f \text{ est continue par morceaux sur } [0 , A] . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On dit alors que f admet $[0 , A]$ pour support.

Etant donnée une fonction f de E , admettant $[0 , A]$ pour support, on définit l'élément L(f) de F par :

$$\forall p \in \mathbb{R} , \quad (L(f))(p) = \int_0^A e^{-pt} f(t) \, dt .$$

(L(f) est évidemment indépendant du support choisi) .

1°/ a) Montrer que E , muni des lois habituelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que : $\forall (f , g) \in E^2 , \quad fg \in E$.

2°/ a) Montrer que l'application L de E dans F est linéaire.

b) Pour tout nombre b de $\mathbb{R}^+$, on définit l'élément P_b de E par :

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in [0 , b] , \quad P_b(t) = 1 \\ \forall t \notin [0 , b] , \quad P_b(t) = 0 . \end{array} \right.$$

Calculer $L(P_b)$.

c) Soient S_1 et C_1 les éléments de E définis par :

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in [0 , \pi] , \quad S_1(t) = \sin t , \quad C_1(t) = \cos t \\ \forall t \notin [0 , \pi] , \quad S_1(t) = 0 , \quad C_1(t) = 0 . \end{array} \right.$$

Calculer $L(S_1)$ et $L(C_1)$.

3°/ [Rappel : Le théorème de dérivation sous le signe d'intégration est hors programme].

Soit f appartenant à E et admettant $[0 , A]$ pour support.

a) Prouver l'inégalité :

$$\forall (p_o , p) \in \mathbb{R}^2 , \quad \forall t \in [0 , A] ,$$

$$\left| e^{-(p-p_o)t} - 1 + (p-p_o)t \right| < (p-p_o)^2 t^2 e^{A|p-p_o|} .$$

[Indication : on pourra appliquer deux fois la formule des accroissements finis].

b) Montrer que L(f) est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme L(g) où g est un élément de E à préciser.

.../...

TOURNER S.V.P.

c) Pour tout nombre b de $\mathbb{R}^+$, on définit l'élément R_b de E par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, b] , & R_b(t) = t \\ \forall t \notin [0, b] , & R_b(t) = 0 . \end{cases}$$

Calculer $L(R_b)$.

4°/ a) Soit τ un nombre réel strictement positif et f un élément de E ; on définit alors la fonction ${}^{\tau}f$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad {}^{\tau}f(t) = f(t - \tau) .$$

Montrer que ${}^{\tau}f$ appartient à E et exprimer $L({}^{\tau}f)$ à l'aide de $L(f)$.

b) Soient S_2 et C_2 les éléments de E définis par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 2\pi] , & S_2(t) = \sin t , \quad C_2(t) = \cos t \\ \forall t \notin [0, 2\pi] , & S_2(t) = 0 , \quad C_2(t) = 0 . \end{cases}$$

Calculer $L(S_2)$ et $L(C_2)$.

c) Soit M l'élément de E défini par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \pi] , & M(t) = 1 \\ \forall t \in]\pi, 2\pi] , & M(t) = -1 \\ \forall t \notin [0, 2\pi] , & M(t) = 0 \end{cases}$$

Calculer $L(M)$.

5°/ Soient f et g deux éléments de E admettant respectivement $[0, A]$ et $[0, B]$ pour supports. On définit la fonction h par :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad h(t) = \int_0^t f(t - u)\, g(u)\, du .$$

On admet que h est continue par morceaux.

a) Montrer que h appartient à E et admet pour support $[0, A + B]$.

Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R} , \quad h(t) = \int_0^{A+B} f(t - u)\, g(u)\, du$.

b) Soit p appartenant à $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $G(t, u) = e^{-pt} f(t - u)\, g(u)$.

On admet que :

$$\int_0^{A+B} \left(\int_0^{A+B} G(t, u)\, du \right) dt = \int_0^{A+B} \left(\int_0^{A+B} G(t, u)\, dt \right) du .$$

Montrer que : $L(h) = L(f)\, L(g)$.

6°/ Soit k l'élément de E défini par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \pi] , & k(t) = 1 - \cos t \\ \forall t \in]\pi, 2\pi] , & k(t) = -2 \cos t \\ \forall t \in]2\pi, 3\pi] , & k(t) = -1 - \cos t \\ \forall t \notin [0, 3\pi] , & k(t) = 0 . \end{cases}$$

On se propose de trouver une fonction f de E vérifiant la condition (C) :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad \int_0^t f(u)\, M(t - u)\, du = k(t) ,$$

où M est la fonction définie en 4°/ c) .

a) Calculer $L(P_{2\pi} - C_2)$. (voir notations en 2°/ b) et 4°/ b)) .

Représenter graphiquement k et calculer $L(k)$.

b) Montrer que si f vérifie la condition (C) , on a nécessairement :

$$\forall p \in \mathbb{R} , \quad (L(f))(p) = H(p)\, (1 + e^{-\pi p}) ,$$

où H est une fonction rationnelle à préciser.

c) Donner une fonction f_o de E telle que :

$$\forall p \in \mathbb{R} , \quad (L(f_o))(p) = H(p)\, (1 + e^{-\pi p}) .$$

Vérifier que f_o est bien une solution du problème proposé.

• • •